

2018年天津河西区理科高三一模数学试卷

一、选择题：共8个小题，每小题5分，共40分.

1. 设集合 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 > 0\}$, 集合 $N = \left\{x \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4\right.\right\}$, 则 $M \cup N = ()$.

- A. $\{x | x \geq -2\}$ B. $\{x | x > -1\}$ C. $\{x | x \leq -2\}$ D. $\mathbf{R}$

2. 命题 $p: " \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 1 > 0 "$ 的否定是 () .

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 1 \leq 0$ B. $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $x_0^2 + 2x_0 + 1 \leq 0$

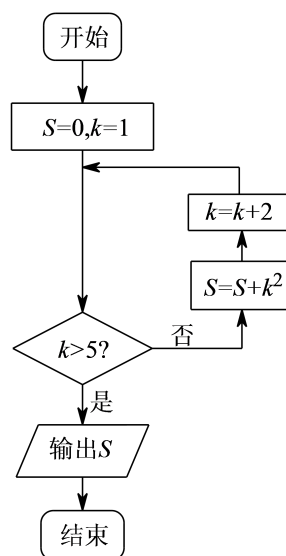
C. $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $x_0^2 + 2x_0 + 1 > 0$

D. $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $x_0^2 + 2x_0 + 1 < 0$

3. 在集合 $\left\{(x, y) \left| \begin{cases} 2x + y - 3 \leq 0 \\ x + y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases} \right.\right\}$ 所表示的平面区域内任取一点 M , 则点 M 恰好取自 x 轴上方的概率为 () .

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

4. 如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 S 值为 () .



- A. 84 B. 35 C. 26 D. 10

5. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $\frac{2a}{\cos A} = \frac{3c - 2b}{\cos B}$, 且 $b = \sqrt{5} \sin B$, 则 $a = ()$.

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

6. 已知三个实数 $2, m, 8$ 构成一个等比数列, 则圆锥曲线 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的离心率为 () .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 若对于任意的不等实数 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 满足: $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) < x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$, 则不等式 $f(\ln(x-1)) - f\left(\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln 2}\right) > 0$, (其中 e 为自然对数的底数) 的解集为 ().

- A. $(1, 1 + \sqrt{e})$ B. $\left(1 + \frac{\sqrt{e}}{e}, 1 + \sqrt{e}\right)$
C. $\left(1, 1 + \frac{\sqrt{e}}{e}\right) \cup (1 + \sqrt{e}, +\infty)$ D. $\left(1, 1 + \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{e^x} (x \in \mathbf{R})$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) - \frac{1}{2}mf(x) + \frac{1}{2}m - 1 = 0$ 恰好有 4 个不相等的实根, 则 m 的取值范围是 ().

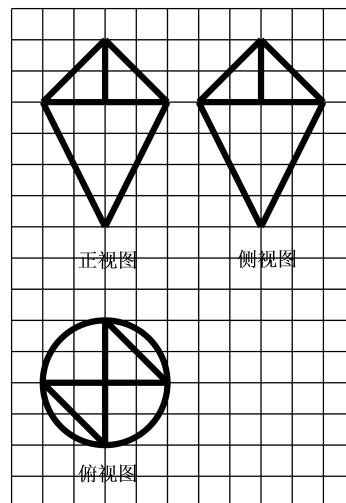
- A. $\left(1, \frac{8}{e^2} + 1\right)$ B. $\left(2, \frac{4}{e^2} + 2\right)$ C. $\left(1, \frac{4}{e^2} + 1\right)$ D. $\left(2, \frac{8}{e^2} + 2\right)$

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 设复数 z_1, z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称, 若 $z_1 = 2 + i$, i 是虚数单位, $\frac{z_2}{z_1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 若关于 x 的二项式 $(1 - ax)^5$ 的展开式中各项的系数和为 -32 , 则 $\int_1^a \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$, (θ 为实参数), 坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m}{2}$, 若直线 l 与圆 C 存在公共点, 则实数 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 在直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{BE}$, 则 $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CA} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字, 且至多有两个数字是偶数的四位, 这样的四位数一共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个. (用数字作答)

三、解答题：本大题共6小题，共80分.

15. 已知函数 $f(x) = 2 \sin \omega x \cos \left(\omega x - \frac{\pi}{3} \right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

(1) 求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

(2) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域.

16. 甲、乙、丙三支足球队进行友谊赛，每两支球队要进行一场比赛，比赛之间相互独立，按以往多次比赛的统计，三支足球队之间的胜负概率如下表：

事件	甲胜乙	甲平乙	甲输乙
概率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

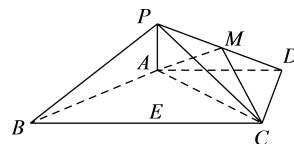
事件	甲胜丙	甲平丙	甲输丙
概率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

事件	乙胜丙	乙平丙	乙输丙
概率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(1) 求乙队能保持不败的概率.

(2) 若获胜一场积3分，平一场积1分，输一场积0分，记 X 表示甲队的积分，求 X 的分布列和数学期望.

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp CD$ ，且 $AD = CD = 2\sqrt{2}$ ， $BC = 4\sqrt{2}$ ， $PA = 2$ ，点 M 在 PD 上.



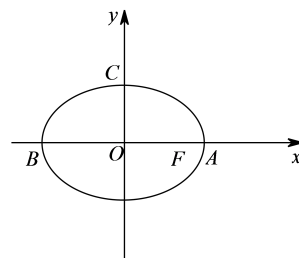
- (1) 求证: $AB \perp PC$.
- (2) 求异面直线 PB 与 DC 所成角的余弦值.
- (3) 若二面角 $M-AC-D$ 的平面角的大小为 45° ，求直线 BM 与平面 PAC 所成角的正弦值.

18. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$, $a_2 = 1$, a_3, a_7 恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前3项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{b_n}{(3b_{n-1} - 1)(3b_n - 1)}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{1}{3}$.

19. 如图, A, B, C 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的顶点, 点 $F(c, 0)$ 为椭圆的右焦点, 原点 O 到直线 CF 的距离为 $\frac{1}{2}c$, 且椭圆过点 $(2\sqrt{3}, 1)$.



(1) 求椭圆的方程.

(2) 若 P 是椭圆上除顶点外任意一点, 直线 CP 交 x 轴于点 E , 直线 BC 与 AP 相交于点 D , 连接 DE . 设直线 AP 的斜率为 k , 直线 DE 的斜率为 k_1 , 问是否存在实数 λ , 使得 $\lambda k_1 = k + \frac{1}{2}$ 成立? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

20. 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x - 1)e^x + f'(0)$.

(1) 求 $f'(0)$ 的值.

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(3) 若 $g(x) = e^{-x}f(x) + \ln x$, $h(x) = e^x$, 过点 $O(0, 0)$ 分别作曲线 $y = g(x)$ 与 $y = h(x)$ 的切线 l_1 、 l_2 , 且 l_1 与 l_2 关于 x 轴对称, 求证:

$$-\frac{(e+1)^3}{2e^2} < a < -\frac{e+2}{2}.$$